JEODEZİK GÖZLEMLER VE RASTGELE DEĞİŞKEN ÖZELLİKLERİ

2. JEODEZİK GÖZLEMLER VE İSTATİSTİK ÖZELLİKLERİ

Doğal bir olayı sayısal olarak ifade edebilmek için, bu olayı aynı türden birim seçilen bir büyüklüğün katları cinsinden ifade etmek yeterli olur. Uygulamada, böyle bir olayın modellenmesi işlemine özetle ölçme denmektedir. Bunun neticesinde de her modellemeden ya da ölçmeden elde edilen sayısal sonuç bilgilerine; ölçü ya da gözlem değerleri adı verilir.

Bütün jeodezik nesneler ya da konular için durum aynı olmaktadır. Yani, kantitatif özelliğe sahip doğal durumdaki jeodezik bir büyüklüğü sayısal olarak temsil etmek için aynı tür özelliğe sahip bir diğer büyüklüğü birim seçip, bu nesneyi birim seçilen büyüklüğün katları cinsinden ifade etme işlemine *Jeodezik ölçme* ve bir jeodezik ölçmeden elde edilen sayısal sonuç değerlerine de *Jeodezik ölçü* ya da *jeodezik gözlem* denmektedir. Böylece, doğada var olan ve her zaman tek anlam taşıyan yani; bir gerçek değere sahip bir jeodezik olay ya da nesne, aynı özelliğe sahip, belirsizliği olmayan, kesin bir ifade ile her zaman tek veya kesin anlamı olan bir dille yani sayılarla ifade edilmiş olur. Bu tür sayılar, jeodezik ölçü ya da jeodezik gözlem veya jeodezik data *(veri)* değeri olmaktadır. Ayrıca, bunların her biri nicel özelliğe sahip büyüklüklerdir.

Burada yapılan açıklamadan görüldüğü gibi, jeodezik gözlemler *(datalar, veriler)* bir modelleme sonucunda elde edilmiş her zaman tek anlam taşıyan sayısal bilgilerdir. Bununla birlikte, uygulamada her modelleme işlemini daima olumsuz yönde etkileyen bazı istenmeyen ve her zaman hata sayılabilecek karaktere sahip olumsuzluklar bulunmaktadır. Bir modelleme işlemi için bu tür olumsuzluklara genel anlamda *hata* ve hatalara neden olan olaylara da *hata kaynakları* denmektedir. Bir modelleme işleminde bu tür hatalara neden olan etkenler bir arada ele alındıklarında bunlar;

- *Ortamdan kaynaklanan olumsuzluklar,*
- *Kişilerden kaynaklanan olumsuzluklar,*
- *Aletlerden kaynaklanan olumsuzluklar,*

şeklinde üç grup altında ele alınabilirler. Bu gibi nedenlerin, jeodezik ölçü ya da gözlem değerleri üzerindeki olumsuz etkilerinin sonuçları da çeşitli karaktere sahip *ölçü hataları* olarak değerlendirilir.

Sonuçta bu hatalar, bir büyüklüğün çok sayıda tekrarlanmış gözlemler ya da ölçmeler neticesinde elde edilmiş tüm ölçü değerleri arasında, küçük değerli de olsalar bazı uyuşumsuzluklara veya tutarsızlıklara neden olurlar. Neticede, bu anlamdaki bütün ölçü değerleri için hatalı ölçü kavramı kullanmak artık kaçınılmaz olur.

Bunun devamında, jeodezik ölçü ya da gözlem değerleri için; ortamdan, kişilerden veya aletlerden kaynaklandıkları varsayılan hatalar, oluşumları, özellikleri ve herbirinin sergilemiş olduğu karakterlerine bağımlı olarak farklı şekillerde ele alınıp, çeşitli şekillerde gruplandırılabilirler. Böyle bir gruplama işlemi, bütün ölçü hataları için yapılabilir (Tablo 1).

Tablo 1: Hata türleri

Kaba hatalar: Bu tür hatalar daha çok bir dalgınlık sonucunda meydana gelirler. Çoğu zaman ölçülerdeki kaba yanlışlıklar olarak yorumlanırlar. Ekseriyetle ölçüyü yapan kişilerden veya operatörlerden kaynaklandıkları düşünülür. Ölçü sayısını artırmakla ve ölçülerin karşılaştırılmaları sonucunda hemen fark edilebilirler. Kaba hatalar ölçülerin tekrarlanması yoluyla giderilebilirler. Çünkü bu hatalar ölçü değerleri için kaba yanlışlıklar olup miktarca büyük değerlerdirler. Örneğin, teodolitle bir açının ölçülmesi esnasında, doğrultu gözlemlerinden birinin açı değerinin 66^g yerine 99^g gibi yanlış bir değerin okunmuş veya yazılmış olması bu tür hatalara bir örnek teşkil etmektedir.

Sistematik Hatalar: Bu tür hatalar ölçüleri nedeni bilinen bir veya birkaç parametrenin fonksiyonu biçiminde etkilerler. Oluşumları nedeniyle daima belli bir kurala veya sistematiğe bağlı yanlışlıklardırlar. Sahip oldukları özellikleri gereği farklı üç grup altında ele alınabilirler. Bunlardan;

- ***Sabit sistematik hatalar;*** Ölçüleri her seferinde sabit bir değer kadar etkileyen hatalardır. Miktar ve işaretçe daima sabit bir değerde olurlar. Daha çok bunların ölçü anında kullanılan aletlerden ve ortamdan kaynaklandıkları sanılır. Bunlar, çoğu zaman gözlemlerde uygun ölçü teknik ya da yöntemi kullanılarak giderilebilirler. Örneğin, *Teodolitle* açı ölçüsü yaparken dürbünün her iki durumunu kullanarak tam dizi *(silsile)* açı gözlemi yönteminin kullanılması veya nivelmanda nivonun iki miraya eşit mesafede bir yere kurularak yükseklik farkının ölçülmesi örnekleri verilebilir. Çünkü tam dizi açı ölçüsünde dürbünün her iki durumunda ölçü yapılması ile aletin optik ekseninin yatay *(muylu)* eksenine dik olmamasından kaynaklanan hata giderilmiş olur. Aynı şekilde bir nivelmanda, nivonun iki komşu miraya eşit mesafede bir yere kurularak mira okumaları neticesinde mira tutulan noktalar arasındaki yükseklik farkının belirlenmesinde olduğu gibi; hem küreselliğin *(ortamın etkisi),* hem de nivonun optik eksenin düzeç eksenine paralel olmamasından kaynaklanan sabit sistematik hatanın, her ikisi de birlikte giderilmiş olur. İşte ölçme tekniğinde böyle bir özellik ya da özel ölçü yöntemlerinin kullanılmış olmasının başlıca nedeni, çeşitli jeodezik ölçme problemlerinde oluşabilecek sabit sistematik karakterli ölçü hatalarının ölçü anında kendiliğinden giderilmiş olmasının temel fikri yatmaktadır.

- ***Tek taraflı sistematik hatalar;*** Bunlar ölçü değerlerini hep aynı yönde etkileyen hatalardır. Miktarca farklı olabilirler ancak işaretçe daima sabittirler. Yani bir ölçme işleminde ya hep pozitif ya da hep negatif işaretli olurlar. Buna bir örnek, arazide zemine işaretlenmiş ancak birkaç şerit metre boyundaki bir mesafede bulunan iki nokta arasındaki yatay mesafenin portreler biçiminde parçalı bir düzende ölçülmesinde yapılan; doğrultuya tam girememeden dolayı oluşan ölçü hatası verilebilir. Bu tür hatalar ölçü sayısını artırılmakla tam giderilemezler. Ancak belli bir miktar azaltılmış olurlar. Genelde, çok küçük değerde de olsalar, bu tür ölçü sonuçlarının içerisinde her zaman var oldukları düşünülebilir.

- ***Çift taraflı*** *(Değişken)* ***sistematik hatalar;*** Bu tür hatalar tüm ölçüleri belli parametrelerin fonksiyonları şeklinde etkilerler. Miktarca küçük olmalarına rağmen pozitif ve negatif işaretli olabilirler. Ancak, işaret değişimi hataya neden olan parametrenin ya da parametrelerin değişimine göre belli aralıklarla gerçekleşir. Bu nedenle, değişken sistematik *(çift taraflı sistematik)* hatalarda, çok küçük aralıkta işaret değişikliği görülmez. Bunlar sadece, hataya neden olan parametrenin ya da parametrelerin belirlenmesi neticesinde, bunların fonksiyonu şeklinde hesaplanarak işaretlerine göre ölçülere düzeltme biçiminde ilave edilerek giderilebilirler. Ölçü sayısını artırmakla ya da uygun ölçü yöntemi kullanmakla hiçbir zaman giderilemezler. Bu duruma bir örnek, çelik şerit metre ile uzunluk ölçüsünde ölçülen değerlere getirilmesi gereken ısı düzeltmesi örnek verilebilir. Sıcaklık değiştikçe şerit metrenin boyu da benzer oranda değişeceğinden, olması gereken değerden daha fazla ya da az bir değer ölçülür. Her seferinde bu miktar hesaplanarak ölçülen uzunluk değerine düzeltme olarak getirilmesi gerekir.

Ancak burada söylemek gerekirse, değişken sistematik hatalar; bu tür hataya neden olan parametrelerin tam ve doğru bir biçimde tespit edilmeleri ve kesin ya da doğru bir şekilde analitik fonksiyonlarla modellendirilmeleri ile ölçülerden tam giderilebilecekleri söylenebilir. Uygulamada bu tür hatalar için kullanılan matematik modellemelerin belirlenmesi gereği çok küçük miktarda olanları tam giderilemediğinden az da olsa ölçülerin içerisinde daima saklı kaldıkları kabul edilebilir. Bu durum, her seferinde gözlemler arasında bir uyuşumsuzluğa neden olur. Pratikte, bu gibi uyuşumsuz ölçüleri belirlemek artık istatistiğin bir diğer uygulama konusu olan "uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi" yöntemlerinden biri ile sağlanabilir *(Baarda 1967).*

Rastgele *(Tesadüfi)* **Hatalar:** Literatürlerde bu tür hatalara; *düzensiz hatalar, aksidental hatalar, gayrı muntazam hatalar, gelişigüzel hatalar..*vs. gibi isimler altında rastlamak mümkündür. Ancak, günümüzde yaygın kullanılanı, *rastgele ölçü hatası* sözcüğüdür. Rastgele hatalar; nedeni tam olarak bilinemeyen ya da bunlar bilinemeyen çok sayıda elemanter hatanın birlikte ölçülere etki ederek neden olduğu hatalardır. Bu haliyle çok sayıda elemanter hatanın herhangi bir fonksiyonu biçiminde meydana geldikleri düşünülebilir. Miktarca çok küçük değerde olabilecekleri gibi pozitif ve negatif işaretli de olabilirler. Ancak, değişken sistematik hataların aksine, çok kısa aralıklarla hemen işaret değiştirirler. Bunların gözlemlerde her zaman var oldukları düşünülür. Örneğin, bir düzlem üçgenin ölçülmüş üç açısının değerinin toplamı 200^g olsa bile her bir açının rastgele ölçü hatası içermemiş olduğu söylenemez. Üçgenin her bir iç açısındaki rastgele ölçü hataları pozitif veya negatif işaretli olacaklarından toplam etkileri sıfır olabilir. Bu düşünceden dolayı toplam etkilerine bakılarak, ölçü değerlerinin hatasız oldukları hiçbir zaman söylenemez. Bunların her zaman ölçülerin içerisinde saklandıkları düşünülür. Ancak, bunların sonuç özellikleri hakkında bir takım bilgilere sahip olunmaktadır. Bu tür bilgiler aşağıdaki gibi sıralanabilirler.

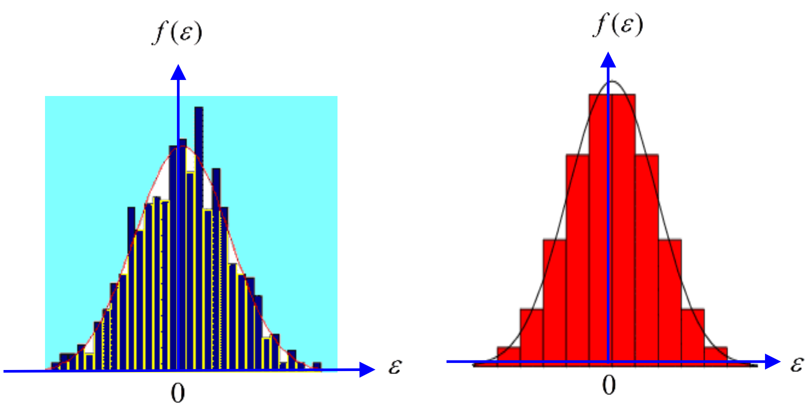
- *Ölçü sayısı sonsuz olunca, pozitif olanlarının sayısı negatif olanlarına eşit olur. Diğer bir ifade ile toplamları sıfırdır. Ya da pozitif rastgele hata yapma olasılığı negatif rastgele hata yapma olasılığına eşittir. Bu haliyle her zaman ortalama değere göre simetrik dağılımda olurlar.*

- *Büyük miktarda olanlarının sayısı, küçük miktarda olanlarının sayısından her zaman daha azdır. Bunun neticesinde, ortalamadan uzaklaştıkça veri yoğunluğu azalacağından, dağılımı tanımlayan frekans ya da yoğunluk eğrisi x ekseni ile yaklaşarak asimtotik olur.*

- *Ayrıca, rastgele hatalar çok kısa aralıklarla sıkça işaret değiştirilirler.*

  Neticede; negatif ve pozitif işaretli olabilirler.

Bu özelliklerinde dolayı tüm rastgele ölçü hataları; Şekil 1'de verildiği gibi farklı sınıf aralığına sahip *histogramlarla* ya da *yoğunluk fonksiyonları* ile ifade edilebilirler.



Şekil 1: Rastgele ölçü hatalarının histogram dağılımı

Bu durumuyla, bir örnekleme sonucunda oluşan rastgele ölçü hataları, anormal durumdaki köşe değerleri yani uyuşumsuz olanları dikkate alınmadığında, her zaman *modu medyanına* eşit bir normal dağılımda oldukları kabul edilir. Bu düşüncenin sonucunda bu tür bilgiler; *GAUSS'* un çan eğrisine uygun simetrik yapılı bir normal dağılım grafiği sergiledikleri rahatlıkla söylenebilir (Şekil 1).

Neticede, rastgele ölçü hataları sergiledikleri özellikler gereği, sadece istatistik
kurallarla incelenebilirler. Bu nedenle, bir ölçü kümesi ile ilgili dağılımın istatistik parametre değerleri olan; *umut* ve *varyans* değerleri, rastgele ölçü hatalarını içeren gözlem değerlerinden ancak özel istatistik kestirim kurallarından birinin kullanılması ile tahmin edilebilirler.

Bu açıklamaların sonucunda, özetle, rastgele ölçü hataları; istatistik anlamda normal dağılıma sahip bir rastgele değişken özelliğinde oldukları rahatlıkla söylenebilir. Bu nedenle de; her yönüyle matematik istatistik kurallarla kolayca irdelenebilirler.

Benzer şekilde, farklı jeodezik uygulamalardan çeşitli alet ve yöntemler kulanılarak kaba ve her türlü sistematik hatalardan arındırılmış oldukları kabul edilen her bir l_i jeodezik ölçü ya da gözlem değeri,

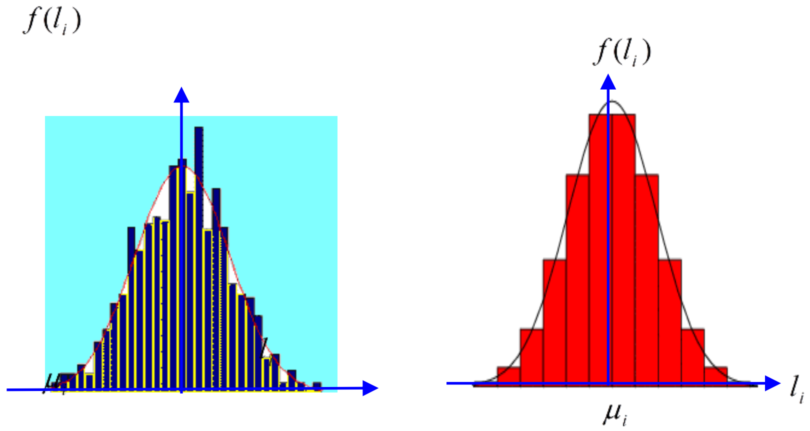
- μ_{l_i} : *Trend (gerçek değer)*
- ε_i : *Rastgele ölçü hatalarını*

içeren iki ayrı parametrenin bir arada birlikte bulunmasından,

$$l_i = \mu_{l_i} \pm \varepsilon_i \qquad 2\text{-}1$$

şeklinde oluşmuş rastgele ölçü hatalarına göre sabit bir miktar kadar ötelenmiş sayısal değerler olmaktadır. Burada, μ_{l_i} *trend veya gerçek değer;* sabit bir sayı ve ε_i rastgele ölçü hataları da istatistik anlamda bir rastgele değişken olduklarından, *"istatistik bir kural olarak bir rastgele değişkenin böyle bir lineer dönüşümü sonucunda elde edilen dönüştürülmüş yeni rastgele değişkenin de benzer özelliğe sahip bir rastgele değişken olmaktadır"*, kuralından hareketle, bunların toplamı biçiminde meydana gelmiş olan l_i ölçü değerleri de, ε_i rastgele ölçü hatası değişkeninin benzer özelliğine sahip bir diğer rastgele değişken olurlar. Bu tanıma göre aralarındaki fark sadece sabit bir öteleme değerinden başka bir şey olmamaktadır. Bu gibi bir değer de sabit bir sayı olan μ_{l_i} ortalama değeri kadardır (Şekil 2).

Bu nedenle, burada tekrar özetlemek gerekirse; l_i jeodezik ölçü ya da gözlem değerleri ε_i ölçü hataları gibi benzer özelliğe sahip, ancak $l_i \to N(\mu_{l_i}, \sigma_{l_i}^2)$ şeklinde μ_{l_i} ortalama değerine ve $\sigma_{l_i}^2$ varyansına göre merkezi olmayan *(dış merkezli)* simetrik bir normal dağılımda istatistik veriler oldukları söylenebilir.



Şekil 2: Jeodezik ölçü ya da gözlemlerin dağılımı

Bunun sonucunda, bütün jeodezik gözlemler normal dağılım ve normal dağılımlı rastgele değişkenlerin farklı fonksiyonları biçiminde türetilmiş diğer rastgele değişkenlerin dağılımları kullanılarak matematik istatistik yasalarına göre irdelenip yorumlanabilirler.

2.1. Düzeltmelerle Rastgele Ölçü Hataları Arasındaki Doğrusal İlişkiler

Önceleri, jeodezik gözlemlerin hatalarının deneysel dağılımları ile uğraşılana kadar geçen süre içerisinde, ölçü düzeltmeleri ile ilgili ε_i ölçü hatalarınınkine benzer bir istatistik düşünce geçersiz sayılmaktaydı. Ancak ne var ki, her türlü jeodezik faaliyetin gelişerek hız kazandığı son yıllarda konuyla ilgili yapılan birçok deneme, incelemelerden ve araştırmalardan sonra bu düşünceden vazgeçilerek, en genel anlamıyla bir dengeleme hesabı probleminin çözümünde L gözlemlerin ve problemde bilinmeyen seçilmiş X parametrelerinin kesin değerlerine göre matris biçiminde ifade edilmiş matematik modeli;

$$L = \Phi(X) \quad ; \quad P = Q_{ll}^{-1} \qquad 2\text{-}2$$

şeklinde kurulmuş bir dengeleme hesabı fonksiyonel modeli eşitliğinin sol tarafındaki L kesin ölçü vektörü yerine l_i gözlem değerlerinden kurulu l ölçü değerleri vektörü kullanıldığında her bir ölçüde daima var olduğu düşünülen farklı değerdeki ε_i rastgele ölçü hatalarından dolayı eşitliğin sağ ve sol tarafları arasındaki denklik bozulur. Bunun neticesinde de bu eşitliğin her iki tarafı arasındaki denklik ilişkisi bozularak,

$$l \neq \Phi(X) \qquad 2\text{-}3$$

biçiminde ifade edilmiş olan bir analitik eşitsizlik meydana gelir. Bir jeodezik problemin çözümünde, rastgele ölçü hatalarını da içeren ölçü ya da gözlem değerlerine göre kurulmuş böyle bir (2-3) eşitsizliğinde denkliği sağlamak amacıyla eşitsizlik bağıntısının sol tarafındaki ölçü değerlerinin her birine,

$$l + v = \Phi(X) \qquad 2\text{-}4$$

şeklinde ilave edilmesi gereken ve küçük miktarlardan oluşan v_i düzeltme değerleri ve bunların oluşturduğu terime de v ölçü düzeltmeleri vektörü denmektedir. Bu şekilde ifade edilmiş olan düzeltmelerin sayısal değerleri problemin çözümü için oluşturulan, ilk model kurma adımında hiçbir zaman bilinemez. Bunların sayısal değerleri ancak uygun tarzda gerçekleştirilen problemin çözümü sonucunda bilinebilir. Diğer taraftan, bir problemle ilgili bu şekilde ifade edilmiş olan bir dengeleme hesabı modelinde;

n : *Eşitliğin sol tarafındaki l ölçü vektörünü oluşturan l_i ölçü değerlerinin sayısı,*

u : *Sağ taraf için bilinmeyen seçilen X bilinmeyen parametresi vektörü elemanlarının sayısından*

$n \rangle u$ daima fazla olmaktadır. Bu haliyle problemin çözümü sonucunda elde edilmesi arzulanan X kestirim parametreleri için tek anlamlı çözüm doğrudan bilinen analitik denklem sistemleri çözümü yöntemi ya da kurallarıyla gerçekleştirilemez. Böyle durumlarda, tek anlamlı çözüm ancak uygun bir amaç fonksiyonu seçilerek kurulan matematik modelle her ikisinin birlikte ele alınarak değerlendirilmesi neticesinde ancak gerçekleştirilebilir. Dengeleme hesabı için böyle bir amaç fonksiyonu; *GAUSS* 'un daha *1795* yılında ölçü hataları için kullanmış olduğu

$$\varepsilon^T \varepsilon \rightarrow \min .$$

"*Hataların karelerinin toplamının minimum kılınması ilkesi*", ancak daha sonraları özellikle *1960* yıllardan sonra *GOTTHARDT* 'ın pratik uygulamalar için kullanmakta olduğu bu koşulu ölçü düzeltmeleri için değiştirerek,

$$v^T P v \rightarrow \min .$$

biçiminde "*Düzeltmelerin karelerinin ağırlıklı toplamlarının minimum olması*" biçiminde ifade ettiği "*En küçük kareler yöntemi*" ilkesi esas alınarak seçilebilir. Hatırlanacağı gibi, böyle bir amaç fonksiyonuna göre gerçekleştirilecek bir çözümde kurulacak fonksiyonel modelin doğrusal olması gerekir. Bu amaçla, doğrusal olmayan (2-4) eşitliğinin sağ tarafındaki X bilinmeyenler vektörü için; *TAYLOR* seri açılımında birinci dereceden diferansiyel terimlerde yakınsayacak şekilde uygun bir x^0 yaklaşık değer seçilerek 2. ve daha yüksek dereceden terimleri ihmal edilmesi neticesinde $X = x^0 + x$ eşitliğine göre doğrusallaştırılır. Böyle bir doğrusallaştırma işlemi sonucunda dengeleme hesabının doğrusal matematik modeli,

a) *Fonksiyonel model* için,

$$A = \begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial x_1})_0 & (\frac{\partial f_1}{\partial x_2})_0 & .... & (\frac{\partial f_1}{\partial x_u})_0 \\ (\frac{\partial f_2}{\partial x_1})_0 & (\frac{\partial f_2}{\partial x_2})_0 & .... & (\frac{\partial f_2}{\partial x_u})_0 \\ : & : & & : \\ (\frac{\partial f_n}{\partial x_1})_0 & (\frac{\partial f_n}{\partial x_2})_0 & .... & (\frac{\partial f_n}{\partial x_u})_0 \end{bmatrix} ; -l = \begin{bmatrix} f_1(x_1^0, x_2^0, .., x_u^0) - l_1 \\ f_2(x_1^0, x_2^0, .., x_u^0) - l_2 \\ : \\ f_n(x_1^0, x_2^0, .., x_u^0) - l_n \end{bmatrix} ;\ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ : \\ v_n \end{bmatrix} ;\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_u \end{bmatrix}$$

b) *Stokastik model* için de

$$C_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2n} \\ : & : & & : \\ \sigma_{n1} & \sigma_{m2} & ... & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ : & : & & : \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q_{ll} \qquad 2\text{-}5$$

kare-simetrik yapıdaki bir ifadeden elde edilen

$$Q_{ll} = \frac{1}{\sigma_0^2} C_{ll}$$

matris gösterimleri kullanılmak üzere,

- $v = Ax - l$: *Düzeltme denklemlerini,* 2-6a
- $P = Q_{ll}^{-1}$: *Ölçü ağırlıklarını* 2-6b

şeklinde elde edilmiş olur.

Böyle bir matematik modelde, u bilinmeyen parametre sayısından $n > u$ daha fazla n ölçü sayısına denk sayıda doğrusal denklemden kurulu böyle bir doğrusal matematik modelin $v^T P v \to \min$. *En küçük kareler yöntemi* ilkesine göre çözümünden,

Bilinmeyenlerin tahmin değeri	:	$x = (A^T PA)^{-1} A^T Pl$	2-7a
Düzeltmelerin tahmin değeri	:	$v = Ax - l = \{A(A^T PA)^{-1} A^T P - E\} l$	2-7b
Dengeli ölçülerin tahmin değeri	:	$L = l + v = A(A^T PA)^{-1} A^T Pl$	2-7c

olarak elde edilir.

Buradan görüldüğü gibi düzeltmeler doğrudan ilk ölçülerin bir fonksiyonu olmaktadır. Dolayısı ile $l_i = \mu_{l_i} \pm \varepsilon_i$ ilk ölçüler, daha önce sözü edilmiş olduğu gibi μ_{l_i} gibi bir tam sayı *(Trend)* ile ε_i rastgele ölçü hatası bileşenlerinden oluşmuş olduğundan, burada ilk ölçülerin bir fonksiyonu biçiminde verilmiş olan düzeltmelerin (2-7b) bağıntısından faydalanılarak düzeltmelerle rastgele ölçü hataları arasında,

$$v = \{A(A^T PA)^{-1} A^T - Q_{ll}\} P\varepsilon \qquad 2\text{-}8$$

biçiminde bir ilişkisinin olduğu yazılabilir. Bu (2-8) ilişkisi, aynı zamanda bütün ölçerdeki rastgele ölçü hatalarının herhangi bir ölçünün düzeltmesi üzerindeki toplam etkisini göstermektedir.

Diğer taraftan aynı bağıntıya ters ağırlıkların yayılması kuralının uygulanması sonucunda, düzeltmelerin ters ağırlık katsayıları için,

$$Q_{vv} = Q_{ll} - A(A^T PA)^{-1} A^T = Q_{ll} - Q_{\hat{l}\hat{l}} \qquad 2\text{-}9$$

matris ifadesi elde edilmiş olur.

Neticede, bu şekilde elde edilmiş olan Q_{vv} düzeltmelerin ters ağırlık matrisi bir önceki (2-8) bağıntısında dikkate alınması neticesinde; ε rastgele ölçü hataları
ile v ölçü düzeltme değerleri arasıdaki ilişkiyi gösteren analitik bağıntı,

$$v = -Q_{vv} P\,\varepsilon = -R\,\varepsilon \qquad 2\text{-}10$$

olarak ya da daha açık bir gösterimle matris biçimindeki ifadesi,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}11$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Bu formülde ölçü hataları ile düzeltmeler arasındaki ilişkiyi gösteren $R = Q_v P$ kare simetrik matris ifadesi

$$R = Q_v P = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$\varepsilon^T = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_n]$ *rastgele ölçü hataları kümesi boyutunda tekil yapıda Idempotent özelliğe sahip bir matris* dır. Yani; $\dot{I}z(R) = Rank(R)$ *(izi rangına eşit)* bir matris olmaktadır. Dolayısı ile inversi alınamamaktadır. Ayrıca, (2-11) bağıntısında gerekli matrisiyel çarpım işlemlerinin yapılması neticesinden de görüldüğü gibi bir ölçünün düzletmesi,

$$v_i = -(r_{i1}\,\varepsilon_1 + r_{i2}\,\varepsilon_2 + r_{i3}\,\varepsilon_3 + \ldots\ldots + r_{in}\,\varepsilon_n) \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad 2\text{-}12$$

biçiminde tüm diğer ε_i rastgele ölçü hatalarının doğrusal bir fonksiyonu olmaktadır. Diğer bir ifade ile bir ölçünün düzeltmesi tüm ölçülerin hatalarından belli oranda etkilenmektedir.

Ancak burada ne var ki, bir ölçünün düzeltmesi hatasının işaretçe tersi olmakla birlikte hiçbir zaman mutlak değerce birbirine eşit oldukları söylenemez. Bu nedenle, rastgele ölçü hatalarının dağılımı için söylenen sözler ölçü düzeltmeleri için uzun yıllar söylenememiştir.

Ancak, son yıllarda konuyla ilgili yapılan birçok deneme ve incelemeler neticesinde normal dağılımdan olan sapmaların, dağılımın köşe veya uç değerleri göz ardı edilse bile yine de diğer alanlarda az da olsa kendilerini hala gösterdikleri ayrıca kanıtlanmıştır. Böyle olmakla birlikte (7-56) bağıntısına göre; “ $x \rightarrow N(\mu,\Sigma)$ *normal dağılımlı rastgele değişkenlerin* A*; mxn boyutunda bir matris olmak üzere* $y = Ax + c$ *şeklindeki lineer dönüşümü sonucunda tanımlanan yeni* y *rastgele değişkeni de* $y \rightarrow N(A\mu + c\,,\, A\Sigma A^T)$ *parametrelerine göre normal dağılımda olacağından”,* normal dağılımdaki ε rastgele ölçü hatalarının doğrusal bir fonksiyonu olan v düzletme değerleri de benzer şekilde normal dağılımda olmaktadır. Bu nedenle, farklı uygulamalarda bir öneri olarak söylenmektedir ki, burada sözü edilen özelliklere sahip jeodezik gözlemlerin bu şekildeki deneysel ve teorik dağılımlarının arasındaki sapma miktarları çok büyük olmamakla birlikte, bunların farklı çalışmalarda her zaman uygun istatistik test yöntemleri kullanılarak istatistik olarak analiz edilmeleri ya da ilgili istatistik test yöntemleri ile irdelenmeleri gerekmektedir. Ayrıca, bu gibi irdelemelerde unutulmaması gereken diğer bir konu da; ilgili rastgele değişkenlerin dağılımları arasındaki farklılıkların, jeodezik denemeler sonucunda özel şekilde belirlenmiş ölçü hatalarıyla ilgili belli sınır değerlerini *(hata sınırı formüllerinden hesaplanan değerleri)* aşamayacağını göstermesidir. Bu hususun sürekli akıllarda tutulması ve burada da vurgulanması gerekmektedir.

Neticede pratik olarak söylenebilir ki, düzeltmelere ilişkin dağılımla ilgili irdelemelerin kabul edilebilir durumda olmasından sonra *(köşe değerlerinin ayıklanmasından sonra)* ε_i ölçü hataları hangi istatistik kural ya da dağılımlarla incelenirse, l_i jeodezik gözlem veya v_i düzeltme değerleri de aynı istatistik kurallarla incelenebilir varsayımı geçerli olmaktadır. Diğer bir ifade ile ε_i ölçü hataları normal dağılımda olduklarından bunlara karşılık gelen ancak birbiriyle uyuşumlu olan l_i jeodezik gözlem veya v_i düzeltme değerleri de aynı dağılımda oldukları kabul edilebilir. Bu nedenle, uygulamada bunların her biri benzer istatistik yöntemlerle irdelenebilir.

Sonuçta; bütün jeodezik gözlemler doğal bir olayı temsil ettiklerinden istatistik tanımları gereği, normal dağılımda olan birer rastgele değişken oldukları kabul edilebilir. Bu durumda, her bir l_i ölçü değerinin yoğunluk fonksiyonu da,

- μ_{l_i} *Umut değer,*
- σ_{l_i} *Standart sapma*

değerleri dağılımın parametrelerini göstermek üzere,

$$f(l_i) = \frac{1}{\sigma_{l_i}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{l_i-\mu_l}{\sigma_{l_i}}\right)^2} \qquad 2\text{-}13$$

şeklinde merkezi olmayan bir normal dağılım bağıntısı ile ifade edilebilir. Ayrıca; birbiriyle uyuşumlu, her biri normal dağılımda olan n adet ayrık türden ölçüden oluşan jeodezik gözlemlerin bir kümesi;

$$l = \{l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n\} \qquad 2\text{-}14$$

şeklindeki bir ölçü vektörü ile gösterildiğinde, bunun bileşik çok boyutlu dağılımını temsil eden yoğunluk ya da frekans fonksiyonu da;

$$f(l;\ E\{l\},\ \sigma_0^2 Q_{ll}) = \frac{1}{\sigma_0 (2\pi)^{\frac{n}{2}} |Q_{ll}|^{\frac{1}{2}}} EXP - (\frac{1}{2\sigma_0^2}(l - E\{l\})^T Q_{ll}^{-1}(l - E\{l\})) \qquad 2\text{-}15$$

şeklindeki bir üstel ifade ile verilebilir. Böyle bir yoğunluk fonksiyonu çok değişkenli olduğundan artık tek değişkenli yoğunluk fonksiyonlarında olduğu gibi bir eğri değil de değişken sayısına bağlı olarak iki rastgele değişkenli bir eğri yüzey, üç veya daha fazla değişken için de bir hacim ya da kapalı bir hiper yüzey temsil etmektedir.

Burada; σ_0^2 gözlemlerin varyans faktörü olmak üzere,

- $E\{\hat{l}\}$: *Gözlem vektörünün umut değerini,*
- $\sigma_0^2 Q_{ll}$: *Gözlemlerin varyans-kovaryans değerlerini içeren simetrik yapılı bir kare matrisi*

göstermektedir.

Burada tekrar vurgulamak gerekirse, bir önceki paragrafta sözü edilmiş olan l gözlem vektörünün rastgele değişken özelliğine sahip ölçülerden kurulu olması, onun,

$$x \rightarrow N(\mu\ ,\ \sigma^2) \qquad 2\text{-}16$$

normal dağılımlı rastgele değişken parametrelerine benzer bir gösterimle;

$$l \rightarrow N(E\{l\}\ ,\ \sigma_0^2 Q_{ll}) \qquad 2\text{-}17$$

şeklinde ifade edilebilmesine de olanak sağlar. Bunun sonucunda, l gözlem vektörünün

- $E\{l\}$: *Ortalama,*
- $\sigma_0^2 Q_{ll}$: *Varyant-kovaryans değerlerine*

göre merkezi olmayan bir normal dağlımda olduğu söylenebilir.

Bu durumun özel bir hali olarak, gözlemlerin bağımsız ya da korelasyonsuz ve eşit duyarlıkta olmaları halinde aynı gözlemlerin;

- $E\{l\}$: *Ortalama,*
- σ_0^2 : *Eşit varyans*

değerli benzer bir normal dağılımda oldukları rahatlıkla söylenebilir. Aksi halde, l ölçü vektörü aynı ortalama değerli fakat daha karmaşık yapıdaki korelasyonlu bir normal dağılım sergiledikleri hiçbir zaman unutulmaması gereken bir diğer konu olmaktadır.

2.2. Düzeltmelerle Rastgele Ölçü Hataları Arasındaki Karesel İlişkiler

Hata teorisi ve dengeleme hesabı kavramının düşüncesi çerçevesinde rastgele ölçü hataları ile düzeltmeler arasında karesel yapıdaki bir ilişkiyi tanımlamak için bir büyüklüğe ilişkin l_i ölçü değerleri ile $\hat{x}$ kesin ve μ gerçek değerleri arasındaki matematiksel ilişkilerden hareket etmek yeterli olur. Böyle bir ilişki için, l_i ölçü değerlerine göre ifade edilmiş olan aynı büyüklüğün; $\hat{x}$ kesin ve μ gerçek değeri için;

$$\hat{x} = l_i + v_i \quad \text{ve} \quad \mu = l_i + \varepsilon_i \qquad \text{2-18}$$

bağıntılarından faydalanılarak,

$$\hat{x} - v_i = \mu - \varepsilon_i \qquad \text{2-19}$$

eşitliği kurulur. Bunun neticesinde parametreler arasında

$$\varepsilon_i = (\mu - \hat{x}) + v_i \qquad \text{2-20}$$

fonksiyonel ilişkisi yazılabilir. Bir büyüklüğe ilişkin n sayıda ölçü için bu ilişki,

$$[\varepsilon] = n(\mu - \hat{x}) + [v] \qquad \text{2-21}$$

ve l ölçülerinde x kesin değerin kestirilmesinde kullanılan *En küçük kareler* yönteminin özelliği gereği $[v] = 0$ olacağından,

$$(\mu - \hat{x}) = \frac{[\varepsilon]}{n} \qquad \text{2-22}$$

ilişkisi elde edilir. Benzer şekilde (2-20) ‘de verilmiş olan $\varepsilon_i = (\mu - \hat{x}) + v_i$ bağıntısının her iki tarafının karesinin alınması neticesinde elde edilen,

$$\varepsilon_i^2 = (\mu - \hat{x})^2 + v_i^2 + 2v_i(\mu - \hat{x}) \qquad 2\text{-}23$$

karesel ifadenin n ölçü sayı kadar değerinin toplamından

$$[\varepsilon\varepsilon] = n(\mu - \hat{x})^2 + [vv] + 2[v](\mu - \hat{x}) \qquad 2\text{-}24$$

karesel bağıntısı yazılabilir. Bu (2-24) karesel toplam bağıntısında,

$$[v] = 0 \quad \text{ve} \quad (\mu - \hat{x}) = \frac{[\varepsilon]}{n} \qquad 2\text{-}25$$

olduklarının dikkate alınmasından,

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + \frac{[\varepsilon]^2}{n} \qquad 2\text{-}26$$

elde edilir. Burada gerekli işlemlerin yapılması neticesinde de,

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} + \frac{2}{n}[\varepsilon_i\varepsilon_j] \quad \text{ya da} \quad (n-1)[\varepsilon\varepsilon] - 2[\varepsilon_i\varepsilon_j] = n[vv] \quad ;\ i \neq j \qquad 2\text{-}27b$$

karesel ifadesi elde edilir.

Sonuçta burada tekrar söylemek gerekirse, özel durumda yani gözlemlerin korelasyonsuz olması halinde bu ilişki,

$$E\{\varepsilon_i\varepsilon_j\} = 0$$

olacağından,

$$(n-1)[\varepsilon\varepsilon] = n[vv] \qquad 2\text{-}28$$

biçiminde bir bağıntı olur.

Bu açıklamaların sonucunda konuyla ilgili, bilinmeyenlerin $u\langle n$ koşulunu sağlayacak şekilde birden fazla sayıda olması halinde aynı karesel ilişki,

* *Korelasyonlu durum için* : $(n-u)[\varepsilon\varepsilon]-2[\varepsilon_i\varepsilon_j]=n[vv] \quad ; \quad i\neq j$ 2-29a

* *Korelasyonsuz durum için de* : $(n-u)[\varepsilon\varepsilon]=n[vv]$ 2-29b

genellemeleri yapılabilir.

Ancak, burada, daha önceki konularda sözü edildiği gibi her biri

$$\varepsilon_i \rightarrow N(\mu_{\varepsilon_i}\ ,\ \sigma^2_{\varepsilon_i})$$

parametrelerine göre normal dağılımda olan rastgele ölçü hatalarının

$$[\varepsilon\varepsilon]=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+.....+\varepsilon_n^2 \qquad \text{2-29c}$$

biçimde elde edilen toplamları olan $[\varepsilon\varepsilon]$ değeri, n ölçü sayısına eşit serbestlik derecesi de $\chi^2(n)$ - dağılımındadır.

Bu haliyle uygulamada karşılaşılabilen özel bir durum için örnekleme veri kümesinden hesaplanmış düzeltmelerin

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+.....+v_n^2$$

biçiminde elde edilmiş toplam değerleri de her biri,

$$v_i \rightarrow N(0\,,\sigma^2_{v_i})$$

parametrelerine göre normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olduklarından ve ayrıca (2-29) bağıntılarındaki denklik ilişkisinden de faydalanılarak, $f=n-u$ serbestlik derecesine göre $\chi^2(f)$ dağılımına sahip birer rastgele değişken olabilecekleri rahatlıkla söylenebilir.

Bu nedenle, uygulamada bunlarla ilgili bu gibi bütün istatistik inceleme ve irdelemeler χ^2 dağılımının istatistik özelliklerine göre gerçekleştirilebilir.

Buna benzer şekilde, burada üzerinde durulması gereken diğer bir durum da, ilk ölçülerin eşit korelasyon değerli olmaları halinde, bunların arasında (2-27b) den de görüleceği gibi,

$$\lfloor \varepsilon_i \varepsilon_j \rfloor \quad ; \quad i \neq j$$

şeklinde bir bağımlılık ilişkisi bulunmasıdır. n elemanlı bir ölçü grubu için böyle bir farklı değerli ilişki,

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

adet olmaktadır. Dolayısı ile eşit duyarlıktaki gözlemler için bu gibi bir ortak otokovaryans ilişkisi,

$$\sigma_{12} = \frac{\lfloor \varepsilon_i \varepsilon_j \rfloor}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

bağıntısından hesaplanabilir. Benzer şekilde, kovaryans değerleri ile korelasyon değeri arasındaki,

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_1^2}\sqrt{\sigma_2^2}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

korelasyon bağıntısından faydalanılarak,

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

formülü yazılabilir. Burada, ilk ölçüler $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ eşit duyarlıkta büyüklükler olacağından bunların arasındaki çaprazbağımlılık ilişkisini gösteren kovaryans değeri,

$$\lfloor \varepsilon_i \varepsilon_j \rfloor = 0.5n(n-1)\sigma_{12} \quad \text{ve} \quad \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_0^2$$

eşitliği ifade edilebilir. Bunun neticede, aralarında,

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} + (n-1)\sigma_{12} = [vv] + \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} + (n-1)\rho_{12}\sigma_0^2 \qquad \text{2-29d}$$

bağıntısının varlığı söylenebilir.

Özel durumda, aralarında herhangi bir korelasyonun olmaması halinde $\rho_{12} = 0$ olacağından 2-29d formülünün en sonterimi sıfır olacağından, bağımsız ya da korelasyonsuz ilk ölçüler için böyle bir ifade

$$n[vv] = (n-1)[\varepsilon\varepsilon] \qquad \text{2-29e}$$

olur.

Ancak, burada bağımsız ilk ölçüler için daha genel bir durumu açıklamak gerekirse, bu ifadeki parametre sayısının birden fazla yani; u tane, $u < n$ *(n veri ya da ölçü sayısı)* olmak üzere, daha genel durum için

$$n[vv] = (n-u)[\varepsilon\varepsilon] \qquad \text{2-29f}$$

genelleştirilmesi yapılabilir.

Sonuçta, tekrar vurgulamak gerekirse; (2-29d) bağıntısındaki ρ_{12} değeri; ilk gözlem değerleri arasındaki eşit miktarda olduğu kabul edilen öz korelasyon katsayısını temsil etmektedir. Aksi halde, ρ_{12} değerinin sıfır olması halinde ölçülerin bağımsız ya da korelasyonsuz oldukları söylenebilir.